PRIMJENA LOKACIJSKOG PROBLEMA POKRIVANJA SKUPA
APPLICATION OF THE LOCATION SET-COVERING PROBLEM

Fatka Kulenović[1], Aladin Crnkić[2]
[1] Univerzitet u Bihaću/Tehnički fakultet, ul. dr. I. Ljubijankića bb, 77000 Bihać, BiH, kulen.a@bih.net.ba
[2] Univerzitet u Bihaću/Tehnički fakultet, ul. dr. I. Ljubijankića bb, 77000 Bihać, BiH, crnkic_al@bih.net.ba

Sažetak: *U praksi se često javljaju problemi gdje treba odrediti broj potrebnih lokacija i lokacije objekata tako da se zadovolje unaprijed definisani standardi kao što su pređena udaljenost, vrijeme putovanja i vrijeme čekanja na uslugu. Problemi u kojima su prethodno definišu određene performanse sistema, a zatim se određuje potreban broj objekata i njihova lokacija poznati su pod nazivom problemi zahtjevanja. Problem pokrivanja skupa predstavljaju posebnu grupu problema zahtjevanja. Problem pokrivanja korisnika je jedan od specifičnih lokacijskih problema. Često se koristi pri određivanju lokacija za hitne službe poput policijskih i vatrogasnih stanica, hitne pomoći itd. One moraju pokriti što veći broj stanovništva, a da pri tome troškovi usluživanja budu što niži. U praksi su troškovi usluživanja klijenta, uglavnom direktno proporcionalni udaljenosti između klijenta i objekata.*
Ključne riječi: *lokacijski problem, klijent, objekt, problem pokrivanja.*

Abstract: *In practice, problems where is necessary to determine the number of locations and the location of facility in order to meet pre-defined standards such as distance traveled, travel time and waiting time for the service, are often. Problems which previously define a specific performance of the system, and then determine the required number of objects and their locations are known as request problems. The set coverage problem represent a special group of a request problems. The coverage problem is one of the specific problems of location. It is often used to determine the location for the emergency services such as police and fire stations, ambulances, etc. These emergency services have to cover as many of the population, while keeping serving costs as low as possible. In practice, the cost of servicing the client is usually directly proportional to the distance between the client and facilities.*

Keywords: *location problem, client, facility, coverage problem.*

1. UVOD

Lokacijski problemi predstavljaju posebnu klasu zadataka optimizacije, kod kojih se najčešće zahtijeva minimizacija udaljenosti, ukupnog vremena putovanja ili nekog drugog parametra. Ovi problemi su veoma često predmet istraživanja, a glavni razlog su velike mogućnosti praktične primjene u raznim oblastima. Lokacijski problemi se odnose na određivanje položaja (lokacija) objekata u prostoru u kojem se već nalaze drugi relevantni objekti. Objekti za čije se lociranje traži mjesto obično su neka vrsta centara koji pružaju usluge, pa se često nazivaju snabdjevači, dok se korisnici usluga

(objekti koji su već postavljeni) nazivaju klijenti ili korisnici. U ovom radu se razmatranje ograničava na diskretan prostor koji se može modelirati pomoću težinskih grafova, odnosno mreža. Čvorovima se predstavljaju novi ili postojeći objekti, a granama njihove relacije: dva čvora su u relaciji ako i samo ako između njih postoji grana. Čvorovi koji predstavljaju postojeće objekte odnose se na one realne objekte nad kojima se vrši neka aktivnost ili usluga, odnosno na objekte u kojima postoje klijenti koji traže određenu uslugu. Nekada isti objekt može da prima i pruža određenu uslugu. Težina pridružena čvoru predstavlja broj klijenata ili tražnju za uslugom iz tog čvora. Novi objekt u zavisnosti od konkretnog problema predstavlja se čvorom iz kojeg će usluga biti pružena. Grane grafa pokazuju odnose između objekata i težine pridružene granama od novog do postojećeg opsluživanja (zrakoplovno pristanište, stanice javnog gradskog prevoza, vatrogasna jedinica, stanica hitne pomoći, policijske stanice).

2. FORMULACIJA LOKACIJSKOG PROBLEMA POKRIVANJA SKUPA

Smatra se da je određeno područje ”pokriveno” uz pomoć datog objekta, ukoliko se nalazi na udaljenosti manjoj od neke unaprijed definisane ”kritične” udaljenosti. Ova udaljenost se zove "udaljenost pokrivanja" i označićemo je sa d^*. Primarni cilj je odabrati lokacije za uslužne objekte tako da što više potencijalnih klijenata bude pokriveno. Problem pokrivanja skupa može se definisati na sljedeći način:

Locirati najmanji mogući broj objekata da se "pokriju" svi čvorovi na mreži [1]. Uvodimo sljedeće oznake u razmatranje:

$B_n = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ skup čvorova u kome se javljaju zahtjevi za određenom uslugom

$A_m = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ skup čvorova koji predstavlja kandidate za lociranje objekata usluživanja

Zadaje se maksimalna dozvoljena udaljenost d^* između tačaka $a_j \in A_m$ i $b_i \in B_n$. Ukoliko je udaljenost $d(a_j, b_i) \leq d^*$, tada se kaže da tačka a_j „pokriva” tačku b_i.

Formira se zatim matrica najkraćih udaljenosti $[d(i, j)]$ između čvorova $a_j \in A_m$ i $b_i \in B_n$, a zatim se transformiše u matricu pokrivanja $[p(i, j)]$ pri čemu je $p(i, j)$ definisan na sljedeći način:

$$p(i, j) == \begin{cases} 1, \text{za } d(i,j) \leq d^* \\ 0, \text{inače} \end{cases} \tag{1}$$

i elemenat je matrice $[p(i, j)]$. Problem pokrivanja skupa sastoji se u nalaženju minimalnog broja tačaka x^* iz tačaka skupa A_m, potrebnog za pokrivanje svih tačaka skupa B_n.

Algoritam za pokrivanje skupa glasi:

Korak 1 Ukoliko postoji bar jedna kolona matrice pokrivanja čiji su elementi jednaki nuli, algoritam se završava jer ne postoji dopustivo rješenje. (Neophodno je ili povećati broj tačaka u kojima su smješteni objekti za uslugu ili promijeniti maksimalnu dozvoljenu udaljenost između objekata za uslugu i tačaka koje on uslužuje).

Korak 2 Ukoliko bilo koja kolona ima samo jednu jedinicu, recimo u redu i^*, tada u tački koja odgovara redu i^* mora da se nalazi objekat. Ta tačka se uključuje u listu tačaka u kojima moraju da se nalaze objekti i iz matrice se eliminiše red i^* i sve kolone u čijem su presjeku sa redom i^* elementi jednaki 1.

Korak 3 Ukoliko je bilo koji red (redovi) i'' takav da su mu svi elementi manji ili jednaki korespodentnim elementima nekog drugog reda i' (tj. ako je $p(i'', j) \leq p(i', j)$ za $\forall j$), tada treba eliminisati red i''.

Korak 4 Ukoliko je bilo koja kolona (kolone) j'' takva da su joj svi elementi veći ili jednaki korespodentnim elementima neke druge kolone j' (tj. ako je $p(i, j'') \geq p(i, j')$ za $\forall j$), tada treba eliminisati kolonu j''.

Korak 5 Ponoviti korake 2 - 4 sve dok:

a) matrica pokrivanja ne postane kompletno prazna ili

b) prolazima kroz korake 2 - 4 nije više moguće eliminisati nijedan red ili kolonu.

U slučaju a) određen je minimalno potreban broj objekata i njihova lokacija. U slučaju b) treba izvršiti detaljna ispitivanja ili pokušati sa primjenom nekog drugog algoritma [2].

Primjer 1. Dato je 8 tačaka označenih sa A, B, C, D, E, F, G i H u kojima postoje određeni zahtjevi za usluživanjem i 6 tačaka označenih kao I, J, K, L, M, N u kojima je moguće smjestiti objekte za vršenje usluživanja. Određeni objekt "pokriva" određenu tačku u kojoj se javlja zahtjev za usluživanjem ako je udaljenost između njih najviše 60. Data je matrica najkraćih udaljenosti između čvorova [3].

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{zahtjevi} \\
\text{objekti} & \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\
[p(i,j)] = \begin{array}{c} I \\ J \\ K \\ L \\ M \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matrica najkraćih udaljenosti $[d(i,j)]$ se transformiše u matricu pokrivanja $[p(i,j)]$ na sljedeći način:

$$p(i,j) == \begin{cases} 1, \text{za } d(i,j) \leq 60 \\ 0, \text{inače} \end{cases}$$

pri čemu je $p(i,j)$ element matrice $[p(i,j)]$. Matrica pokrivanja ima oblik:

$$\begin{array}{cc} & \text{zahtjevi} \\ \text{objekti} & \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\ [d(i,j)] = \begin{array}{c} I \\ J \\ K \\ L \\ M \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 29 & 43 & 62 & 58 & 74 & 71 & 20 \\ 75 & 71 & 32 & 27 & 96 & 87 & 42 & 46 \\ 42 & 84 & 77 & 28 & 74 & 46 & 76 & 70 \\ 29 & 14 & 29 & 57 & 76 & 66 & 44 & 60 \\ 61 & 89 & 88 & 90 & 30 & 91 & 88 & 32 \\ 42 & 27 & 96 & 29 & 75 & 69 & 29 & 74 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrica pokrivanja nam daje informaciju koje od tačaka u kojima se javljaju zahtjevi za usluživanjem mogu biti pokrivene iz određene tačke u kojoj je smješten određeni objekt. Na primjer, tačka M pokriva tačke E i H. Primjenimo izloženi algoritam Larson i Odonij-a na matricu pokrivanja. Možemo konstatirati da postoji dopustivo rješenje jer u svim kolonama matrice $[p(i,j)]$ postoji barem jedna jedinica. Ovom konstatacijom završen je korak 1 algoritma. U koraku 2 vidimo da kolona F ima samo jednu jedinicu i to u presjeku sa redom K. Iz te činjenice slijedi da jedan objekt mora biti lociran u tački K, jer ako ne bi u tački K locirali objekt, tačka F ne bi bila pokrivena odnosno usluživana. Vrijedi da je $p(K,A) = p(K,D) = p(K,F) = 1$ pa iz daljeg razmatranja eliminišemo red K i kolone A,D i F. Tada reducirana matrica glasi:

$$\begin{array}{cc} & \textit{klijenti} \\ \textit{objekti} & \begin{array}{ccccc} B & C & E & G & H \end{array} \\ [p(i,j)] = \begin{array}{c} I \\ J \\ L \\ M \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

U koraku 3 eliminišemo redove J i M, jer svi elementi reda J su manji ili jednaki odgovarajućim elementima reda L, što znači da sve tačke koje pokrivaju objekt iz tačke J mogu biti pokriveni objektom iz tačke L. Isto vrijedi i za redove M i N respektivno. Reducirana matrica glasi:

$$\begin{array}{cc} & \textit{klijenti} \\ \textit{objekti} & \begin{array}{ccccc} B & C & E & G & H \end{array} \\ [p(i,j)] = & \begin{array}{c} I \\ L \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

U koraku 4 eliminišemo kolone B i C pošto su elementi u ovim kolonama veći ili jednaki odgovarajućim elementima kolona E i G respektivno, što znači da će objekt koji pokriva tačku E moći pokrivati i tačke B i C. Po završetku koraka 4 reducirana matrica glasi:

$$\begin{array}{cc} & \textit{klijenti} \\ \textit{objekti} & \begin{array}{ccc} E & G & H \end{array} \\ [p(i,j)] = & \begin{array}{c} I \\ L \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pošto su elementi kolone H veći ili jednaki odgovarajućim elementima kolona E i G eliminisaćemo i kolonu H. Sada reducirana matrica glasi:

$$\begin{array}{cc} & \textit{klijenti} \\ \textit{objekti} & \begin{array}{cc} E & G \end{array} \\ [p(i,j)] = & \begin{array}{c} I \\ L \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vratimo se na korak 2. Pošto kolone E i G imaju tačno po jedan element koji je jednak 1, zbog toga u tačkama I i L moraju biti locirani objekti koji će pokrivati tačke E i G, jer bi u nekom drugom slučaju ove tačke ostale nepokrivene. Eliminisanjem redova I i L dobije se matrica pokrivanja koja je prazna, a to znači da je algoritam završen.

Dobili smo rezultat koji govori da je minimalni potrebni broj objekata za pokrivanje tačaka A, B, C, D, E, F, G i H jednak 3 i svi objekti trebaju biti smješteni u tačkama K, I i L. Matrica najkraćih udaljenosti između skupa tačaka I, K, L i skupa tačaka A, B, C, D, E, F, G ,H glasi:

$$
\begin{array}{rcc}
 & & \textit{klijenti} \\
\textit{objekti} & & \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\
[d(i,j)] = & \begin{array}{c} I \\ K \\ L \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 29 & 43 & 62 & 58 & 74 & 71 & 20 \\ 42 & 84 & 77 & 28 & 74 & 46 & 76 & 70 \\ 29 & 14 & 29 & 57 & 76 & 66 & 44 & 60 \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Svaka tačka u kojoj postoji zahtjev za usluživanjem pokrivena je iz najbližeg objekta. Tako objekt u I pokriva tačke A, E i H, objekt u L tačke B, C i G. Udaljenosti između svih tačaka u kojim postoji zahtjev za usluživanjem i odgovarajućih objekata koji ih uslužuju uvijek su manja od 60, kako je bilo i zahtjevano uslovom zadatka.

3. ZAKLJUČAK

U ovom radu predstavljen je lokacijski problem pokrivanja skupa. Limitirana udaljenost od objekta opsluživanja do korisnika rješavala se tako da su se generisala sva moguća rješenja, počevši od rješenja u kojima je jedan čvor izabrana lokacija, do rješenja u kome su sva rješenja izabrane lokacije. Nakon toga se iz skupa svih mogućih izdvojila rješenja koja su dopustiva, odnosno rješenja u kojima izabrane lokacije pokrivaju ukupnu korisničku tražnju. Smatra se da je određeno područje ”pokriveno” uz pomoć datog objekta, ukoliko se nalazi na udaljenosti manjoj od neke unaprijed definisane ”kritične” udaljenosti.

LITERATURA

[1] Toregas C., Swain R., ReWele C., Bergman L: The Location of Emergency Service Facilities, Operations Research, 9, 1363-1373, 1971

[2] Current J., Daskin M., Schilling D.: Discrete Network Location Models, In: Drezner, Z., Hamacher H., (Eds.), Facility Location: Applications and Theory, 81-118, Springer Verlag, Berlin, 2002

[3] Kulenović, F.: Doktorska disertacija, Metode matematičkog programiranja za rješavanje lokacijskih i alokacijskih problema, PMF, Sarajevo, 2014