



# 7th INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE ON DEFENSIVE TECHNOLOGIES OTEH 2016

Belgrade, Serbia, 6 – 7 October 2016



## NUMERICAL CALCULATION OF J-INTEGRAL USING FINITE ELEMENT METHOD

BAHRUDIN HRNJICA

University in Bihać – Faculty of Technical Engineering Bihać, Bihać, bahrudin.hrnjica@unbi.ba

FADIL ISLAMOVIĆ

University in Bihać – Faculty of Technical Engineering Bihać, Bihać, f.islam@bih.net.ba

DŽENANA GAČO

University in Bihać – Faculty of Technical Engineering Bihać, Bihać, dzgaco@bih.net.ba

ESAD BAJRAMOVIĆ

University in Bihać – Faculty of Technical Engineering Bihać, Bihać, bajramovic\_e@yahoo.com

**Abstract:** This paper presents the procedures and results of numerical determination of fracture mechanics parameters in condition of elastic-plastic fracture mechanics. The finite element analyses were performed on standard Single-edge notched bend, SENB specimen of structural steel. Discretization was performed on three specimens with different crack lengths. The results of numerical analysis were compared with the experimental results, in order to evaluate numerical models. The results of analysis show good approximation numerically determined J integral compared with experimental results.

**Keywords:** fracture mechanics, J integral, finite element method, numerical integration, SENB specimen.

### 1. INTRODUCTION

Metod konačnih elemenata ili kraće MKE danas je postala prepoznatljiva metoda i sastavni dio svakog CAE (Computer Aided Engineering) sistema. Ona je nezaobilazna metoda u analizi mnogih kompleksnih sistema u kojem živimo. U samom početku nastajanja MKE se posmatrala kao proširena matrična metoda strukturalne analize odnosno analize naponsko-deformacionog stanja konstrukcije[1].

Brzi razvoj MKE ponajviše treba zahvaliti brzom i uspješnom razvoju kompjuterske nauke i razvoju softvera u kojim su uspješno implementirali algoritmi bazirani na MKE. Softverski paketi za MKE obezbijedili su precizan i pogodan alat za izračunavanje sistema algebarskih jednačina, koji čine jednu od osnovnih osobina MKE.

Danas MKE se primjenjuje u širokom spektru primijenjenih nauka od mašinstva i bio-mehanike, do elektromagnetskih polja i termodinamike. MKE nije samo metoda jednostavne linearne elastične naponsko-deformacione analize, ona danas uspješno rješava elasto-plastične probleme, probleme kompleksne nelinearne, nestacionarne dinamike, nelinearno i nestacionarno prenošenje toplote, mehanike fluida, bio-mehanike i drugo[1].

Primjena metoda konačnih elemenata danas je široko prisutna prvenstveno zbog lakoće implementacije i numeričkog pristupa rješavanju diferencijalnih jednačina. Metod konačnih elemenata moguće je koristiti gdje god je

potrebno rješavati obične ili parcijalne diferencijalne jednačine. Široka primjena metode potvrđuje i činjenica da su prirodni fenomeni vrlo slični jer se opisuju istim diferencijalnim jednačinama, dok se samo razlikuju u tipu varijabli, početnim i graničnim uvjetima.

MKE se uspješno koristi u Mehanici loma od njenih samih početaka. U ovom radu će biti primjenjena metoda konačnih elemenata u izračunavanju J integrala, parametra elasto-plastičke mehanike loma. Parametri mehanike loma u pravilu se dobijaju eksperimentalnim putem, međutim takvi eksperimenti nisu toliko jeftini da bi se mogli izvoditi svakodnevno za svaki pojedinačni slučaj.

Nastojanja da se eksperimentalna metoda u određenoj mjeri zamjeni numeričkim metodama predstavlja logičan pristup. Razvojem kompjuterske nauke, hardvera i softverskih rješenja danas je moguće simulirati gotovo sve prirodne procese. Zbog to je sve veći interes za razvoj softverskih modula za izračunavanje J integrala kao jednog od najvažnijih parametara mehanike loma.

Danas se u zadnjim verzijama Ansys, Abaqus i drugih popularnih softverskih paketa za numeričku analizu nalaze i moduli za izračunavanje J integrala kao i ostalih parametara mehanike loma.

### 2. NUMERIČKO ODREĐIVANJE J INTEGRALA

Numeričko određivanje parametara mehanike loma

razvijano je zadnjih 40 godina, pri čemu je nastalo desetak metoda. Generalno, sve metode se mogu podijeliti na metode podudaranja tačke i energijske metode. Prve metode određuju faktor intenziteta napona preko napona i deformacija u tijelu, dok druge određuju energiju deformisanja koja je korištena za izračunavanje faktora intenziteta napona.

Prednost energijskih metoda je u tome što se mogu primjenjivati i na nelinearna područja, dok su manje istih nemogućnosti odvajanja energije deformisanja prema modelima odvajanja prsline. Sve današnje moderne numeričke metode za određivanje parametara mehanike loma baziraju se na metodi integrala energijske domene [3].

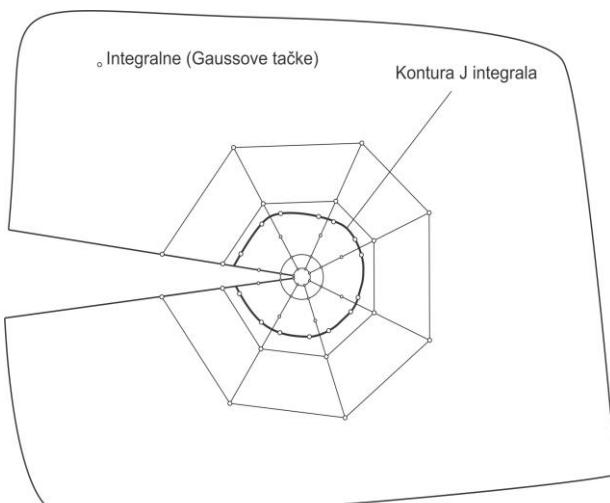
Zbog činjenice da današnji softveri za analizu naponskog stanja izračunavaju naponsko deformaciono stanje u integralnim, odnosno Gaussovim tačkama, numeričko izračunavanje J integrala bazira se na ovim tačkama. Iz tog razloga konturu oko vrha prsline posmatramo u integralnim, a ne u čvorovima konačnih elemenata [4]. Numeričko određivanje J integral započinje poznatim izrazom za konturni integral.

Napišimo opšti oblik J integral, pri čemu je x osa paralelna sa pravcem rasta prsline:

$$J = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \int_{\Gamma} \left( W_s dy - T_i \frac{du_i}{dx} d\Gamma \right) \quad (1)$$

gdje je:

- $T_i$  - vektor napona,
- $u_i$  - vektor pomjeranja,
- $W$  - energija deformisanja,
- $d\Gamma$  - dužina luka konture.



**Picture 1.** Zkonačni elementi oko vrha prsline i definisanje zatvorene oblasti oko vrha prsline

Definisanjem svake komponente J integrala prikazanog izrazom (1) možemo dobiti pogodan analitički izraz za J integral koji se može numerički izračunati.

Energiju deformisanja možemo pisati kao:

$$Ws = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right]. \quad (2)$$

Priraštaj y ose možemo pisati kao:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta. \quad (3)$$

Vektor naprezanja T i priraštaj pomaka dobijemo kao skalarni proizvod:

$$T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} = \left[ (\sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_{yy} n_2) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right]. \quad (4)$$

Diferencijal konture izračunavamo kao:

$$d\Gamma = \sqrt{\left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2} d\eta, \quad (5)$$

za  $d\xi = \text{const.}$

Ako izraze (2), (3), (4) i (5) uvrstimo u (1) dobijamo izraz koji je pogodan za integraciju. Kontura preko koje se vrši integracija izabrana je tako da odgovara elementima matrice krutosti. Iz tog razloga kontura mora prolaziti Gaussovim integracijskim tačkama. Svi izrazi koji su uvršteni u izaz (1) su poznati i mogu se direktno dobiti preko standardnih programa za numeričku analizu.

Evaluacijom konačnog izraza vrši se preko integracijskih tačaka duž konture (slika 1) pa dobijamo diskretni oblik izraza (1):

$$J = \sum_{g=1}^{ng} W_g I_g(\xi_g, \eta_g) \quad (6)$$

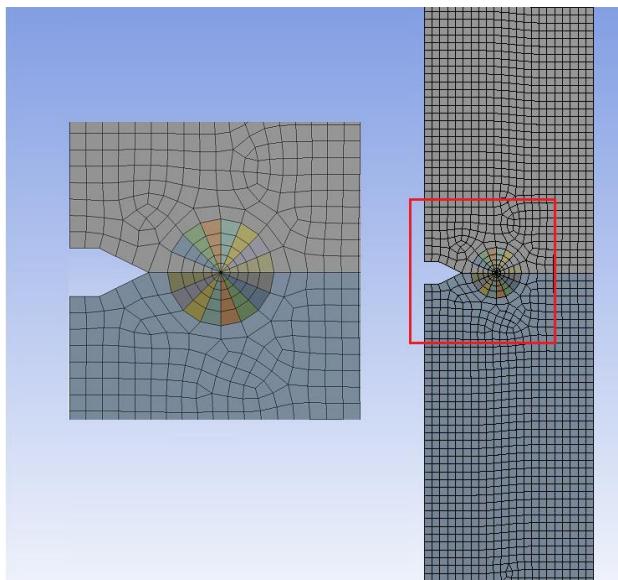
gdje je:  $W_g$  – Gaussov težinski faktor,  
 $n_g$  – broj integracijskih tačaka,  
 $I_g$  – integrand koji se izračunava za svaku integracijsku tačku g.

Indeks g označava da se vrijednosti koje se nalaze u izrazu (6) uzimaju u gaussovim integralnim tačkama, a ne u čvorovima konačnog elementa.

### 3. REZULTATI NUMERIČKE ANALIZE

U ovom radu izvršeno je numeričko određivanje J integrala za SENB epruvetu sa početnom zamornom prslinom dužine  $a_0$ . Numerička analiza izvršena je nad tri SENB epruvete istih dimenzija, a koje su u procesu zamaranja zamorene sa različitom vrijednosti početne zamorne prsline. Početne zamorna prsline SENB epruveta geometrijski su obrađena shodno standardu ASTM 1820[5]. Na osnovu geometrijskih karakteristika izvršeno je modeliranje epruvete, te izrađena mreža konačnih elemenata. Numeričko određivanje J integrala izvršeno je na osnovu eksperimentalnog određivanja J integrala na način da su simulirani ulazni podaci, opterećenja, dužine prsline i mehaničke osobine materijala.

Kako je ranije naglašeno oko vrha prsline izvršena je mreža konačnih elemenata definisana prethodno preko singularnih konačnih elemenata [5].

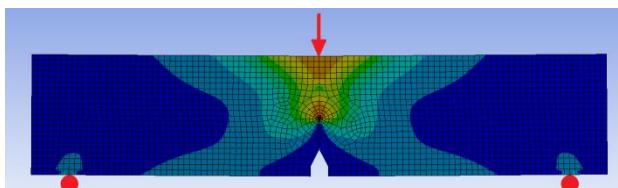


**Picture 2.** 2D model SENB epruvete sa generiranim mrežom konačnih elemenata

Slika 2. prikazuje model SENB epruvete sa generiranim mrežom. Kako se može vidjeti epruveta je modelirana kao 2D model, a mreža konačnih elemenata izgrađena je od četverouglih, odnosno kvadrilateralnih konačnih elemenata koji sadržavaju osam čvorova. Četiri čvora se nalaze na tjemenima četvorougla, dok se ostala četiri čvora nalaze na sredinama stranica (vidi sliku 2).

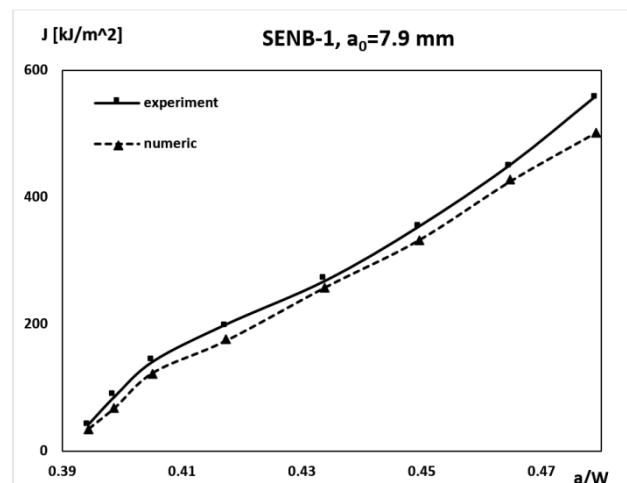
Singularnim konačnim elementima postiže se veća preciznost, a interpolacijske funkcije mogu bolje opisati promjenu napona i drugih veličina kroz čvorove konačnog elementa. Kada je riječ o samom vrhu prsline, četverougaoni elementi se degenerišu u trouglaste (slika 2).

Čvorovi koji se nalaze na sredini stranica koje se spajaju u vrhu prsline, pomjeraju se za  $\frac{1}{4}$  pri linearno-elastičnoj, a  $\frac{1}{2}$  pri elasto-plastičnoj mehanici loma[5]. Ovim se definije stepen singularnosti koji iznosi  $1/\sqrt{r}$  pri linearno-elastičnoj, a  $1/r$  pri elasto-plastičnoj analizi. Prethodno provedeno pre-procesuiranje podrazumijevalo je i variranje veličine prsline u određenom intervalu, shodno eksperimentalnim rezultatima dužine prsline i korespondentnog opterećenja.



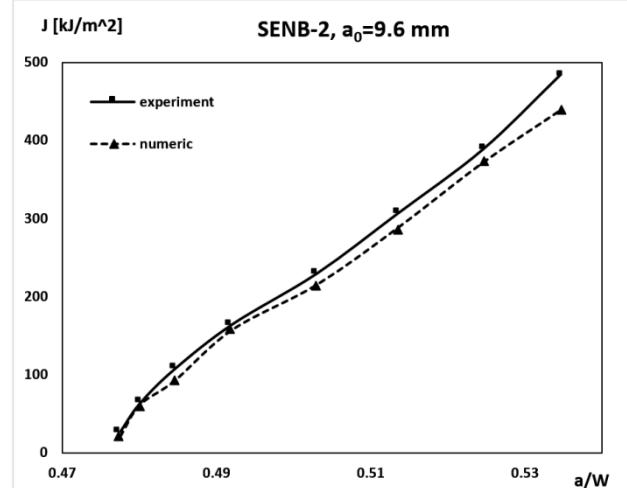
**Picture 3.** Numerički određeni J integral za SENB epruvetu izvađenu iz OM [5]

Kako se može vidjeti sa slike 3, prije numeričkog određivanja J integrala, izvršena je numerička analiza napona i deformacija, a zatim se pristupilo procesu numeričkog određivanja J integrala kroz integralne a ne tačke čvorova konačnih elemenata.

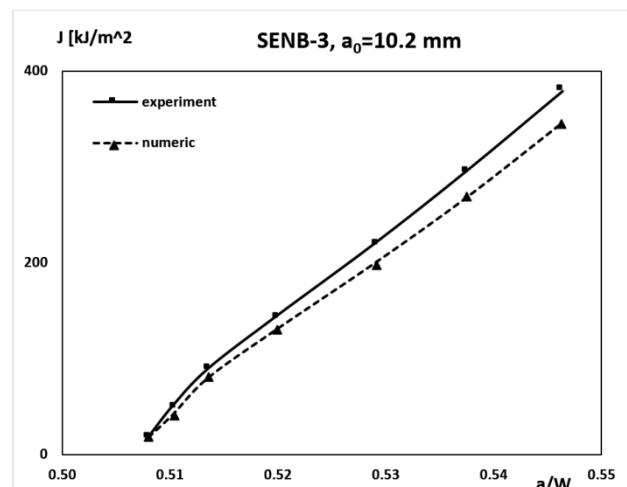


**Picture 4.** Prikaza numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti J integrala za SENB-1 epruvetu

Na slici 4 prikazani su usporedni rezultati numeričke analize i eksperimentalnih rezultata za epruvetu istih geometrijskih vrijednosti.



**Picture 5.** Prikaza numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti J integrala za SENB-2 epruvetu



**Picture 6.** Prikaza numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti J integrala za SENB-3 epruvetu

Rezultati numeričke analize prikazani na slikama 5 i 6 prikazuju komparaciju rezultata sa korespondentnim eksperimentalnim vrijednostima J integrala, iz kojih je

vidljivo da su numerički rezultati J Integrala poprimili manje vrijednosti u odnosu na eksperimentalne rezultate. Takođe može se uočiti i da su kod sve tri epruvete rezultati bliži eksperimentalnim za manje vrijednosti omjera prsline i debljine epruvete (a/w), odnosno za manje vrijednosti veličine prsline a.

## 5. CONCLUSION

U radu je izvršena numerička analiza J integrala nad SENB eprvetama različitih vrijednosti inicijalne zamorne prsline. Rezultati numeričke analize pokazuju da su numerički rezultati J Integrala bliži eksperimentalni kada je vrijednost dužine prsline manja. Eksperimentalni pristup u određivanju J Integrala predstavlja osnovnu,

preciznu i najsigurniju metodu, koja zbog same kompleksnosti provođenja i troškova izvođenja eksperimenta u određenim slučajevima predstavlja vrlo zahtjevan proces. Određivanje J integrala metodom konačnih elemenata predstavlja solidnu alternativu, te ju je moguće koristiti u kombinaciji sa eksperimentalnom metodom. Koliki je značaj numeričkog određivanja parametara mehanike loma pokazuje i činjenica da današnji najpoznatiji softveri za numeričku analizu poput Ansys, Abaqus i dr. posjeduju module za numeričko određivanje parametara mehanike loma: J Integrala, faktora intenziteta napona, energije deformisanja, kao i ostale značajke mehanike loma.