PRIMJENA PROGRAMSKOG PAKETA MATHEMATICA U ANALIZI LINEARIZIRANE STABILNOSTI EKVILIBRIJUMA JEDNOG SISTEMA DIFERENTNIH JEDNAČINA

Aladin Crnkić, Fatka Kulenović
Tehnički fakultet, Bihać, dr. I. Ljubijankića bb, Bosna i Hercegovina, aladin.crnkic@hotmail.com

Ključne riječi: sistem diferentnih jednačina, ekvilibrijum, stabilnost, Mathematica

SAŽETAK:

U ovom radu razmatrat ćemo sistem racionalnih diferentnih jednačina u ravni:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n}{A_1 + y_n^2} \\ y_{n+1} = \frac{y_n}{A_2 + x_n^2} \end{cases}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

gdje su parametri A_1 *i* A_2 *pozitivni realni brojevi, a početni uslovi* x_0 *i* y_0 *su nenegativni proizvoljni brojevi. Odredit ćemo karaktere stabilnosti ekvilibrijuma sistema, te primjenom programskog paketa Mathematica slikovito prikazati ponašanje racionalnog dinamičkog sistema (1) u određenim oblastima.*

1. UVOD

Pojam diferentne jednačine javlja se još u ranom srednjem vijeku u raspravi *Liber abaci*, koju je napisao italijanski matematičar Leonardo Pizano, odnosno čuveni Fibonači. U ovoj raspravi opisan je naime problem s kunićima. Diferentne jednačine, odnosno sistemi diferentnih jednačina imaju sve širu primjenu u mnogim područjima nauke, prije svega u matematičkoj biologiji, epidemiologiji i ekonomiji, gdje *(n+1)*-va generacija ili stanje sistema zavisi od prethodnih *n* generacija ili stanja. Njima se opisuju diskretni matematički modeli, za razliku od diferencijalnih jednačina kojim se opisuju kontinuirani matematički modeli. Problem proučavanja diferentnih jednačina i sistema diferentnih jednačina je inače znatno složeniji od sličnih problema s diferencijalnim jednačinama. Naime, dok smo kod diferencijalnih jedačina najčešće mogli dobiti opće (globalne) rezultate, kod diferentnih jednačina to uglavnom nije tako, izuzev donekle u slučaju linearnih diferentnih jednačina.

U ovom radu pisat ćemo o kompetitivnim diskretnim dinamičkim sistemima u ravni. Krenut ćemo od osnovnih rezultata, te njihova primjena na jednom konkretnom primjeru kompetitivnog sistema. Razmatrat ćemo sistem (1) koji je proučavan u radu [5].

Kompetitivne i kooperativne sisteme proučavali su mnogi matematičari. Jedan od razloga zbog kojih su dvodimenzionalni diskretni kompetitivni i kooperativni sistemi jako važni je njihova velika primjena i činjenica da mnogi primjeri matematičkih modela u biologiji i ekonomiji koji uključuju kompeticiju ili kooperaciju su modeli koji uključuju dvije vrste. Drugi razlog je taj što je teorija dvodimenzionalnih kompetitivnih i kooperativnih sistema dobro razvijena, za razliku od takve teorije za tri i višedimenzionalne sisteme. Da bi budućim istraživačima i čitaocima približili ovu složenu materiju, autori su u razmatranom primjeru, koristeći softwer Mathematica, te paket Dynamica 3.0, slikovito dali prikaze ponašanja rješenja racionalnog dinamičkog sistema (1) u određenim oblastima.

Mathematica je matematički softver (jezik i paket) za simboličko i numeričko rješavanje problema iz svih poznatih oblasti matematike, fizike i drugih oblasti nauke. Namjenjena je kako korisnicima (učenicima, studentima, inženjerima) za rješavanje već poznatih, proučenih problema, tako i istraživačima koji je mogu upotrijebiti za najkomplikovanije proračune i analize. Posebno je pogodan za obradu numeričkih podataka, sposobnost simboličkog procesiranja i sistem za grafičko prikazivanje podataka i funkcija.

2. OSNOVNI REZULTATI

Posmatrajmo sistem diferentnih jednačina

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x_0, y_0) \in P, \tag{2}$$

gdje je $P \in \Re$, $T = (f, g) : P \to P$ i funkcije f i g neprekidne**.** Pretpostavimo da početna tačka (x_0, y_0) leži u domenu T, pa tako sistem (2) definira $\{(x_n, y_n)\}$ za sve $n \geq 0$. Kad je funkcija f neopadajuća po x i nerastuća po y i funkcija g je nerastuća po x i neopdajuća po y, sistem (2) nazivamo kompetitivnim. Kad su funkcije f i g neopadajuće i po x i po y sistem (2) nazivamo kooperativnim.

Definicija 2.1

Tačka ekvilibrijuma *sistema (2) je tačka* $E(\bar{x}, \bar{y}) \in \Re^2$ *takva da je*

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases},$$

To jest, $E(\bar{x}, \bar{y})$ *je fiksna tačka funkcije* T.

U narednoj definiciji definisat ćemo stabilnost ekvilibrijuma sistema diferentnih jednačina. Označimo sa $\|\cdot\|$ euklidovu normu u $\Re^2$ definisanu sa

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definicija 2.2

a) *Tačka ekvilibrijuma* $E(\bar{x}, \bar{y})$ *sistema (2) se naziva* stabilnom *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da* $\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$, *implicira* $\|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \varepsilon$, *za sve* $n \geq 0$. *Inače se ekvilibrijum* $E(\bar{x}, \bar{y})$ *naziva* nestabilnim.

b) *Tačka ekvilibrijuma* $E(\bar{x}, \bar{y})$ *sistema (2) se naziva* asimptotski stabilnom *ako je ona stabilna i postoji* $\gamma > 0$ *tako da* $(x_n, y_n) \to (\bar{x}, \bar{y})$ *kad* $n \to \infty$ *za svako* (x_0, y_0) *za koje vrijedi* $\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \gamma$.

Predmet proučavanja teorije stabilnosti je analiziranje ponašanja rješenja blizu tačke ekvilibrijuma, specijalno, da li se one približavaju ili razilaze od tačke ekvilibrijuma. Primjenom Schur-Cohnovog kriterija dobivamo Teorem koji daje potrebne i dovoljne uvjete za lokalnu stabilnost ekvilibrijuma.

Svojstvene vrijednosti λ_i matrice $J_T\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ su korijeni jednačine

$$\det\left(J_T\left(\bar{x},\bar{y}\right)-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\bar{x},\bar{y}\right)-\lambda & \frac{\partial f}{\partial x}\left(\bar{x},\bar{y}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\bar{x},\bar{y}\right) & \frac{\partial g}{\partial y}\left(\bar{x},\bar{y}\right)-\lambda\end{vmatrix}=0$$

ili kraće, jednačine

$$\lambda^2-p\lambda+q=0, \tag{3}$$

pri čemu su

$$p=Tr\,J_T\left(\bar{x},\bar{y}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\quad i\quad q=\det J_T\left(\bar{x},\bar{y}\right).$$

Teorem 2.1

Neka je $T=\left(f,g\right)$ *neprekidna i diferencijabilna funkcija definisana na otvorenom skupu* $P\subset\Re^2$ *i neka je* $E\left(\bar{x},\bar{y}\right)\in P$ *ekvilibrijum preslikavanja* T. *Tada vrijedi:*

a) *Ako oba korijena kvadratne jednačine (3) leže u otvorenom jediničnom disku* $|\lambda|<1$, *onda ekvilibrijum* E *sistema (2) je* lokalno asimptotski stabilan.

b) *Ako najmanje jedan od korijena jednačine (3) ima apsolutnu vrijednost veću od jedan, onda ekvilibrijum* E *sistema (2) je* nestabilan.

c) *Potreban i dovoljan uvjet da oba korijena jednačine (3) leže u otvorenom jediničnom disku* $|\lambda|<1$, *je* $|p|<1+q<2$. *U tom slučaju lokalno asimptotski stabilan ekvilibrijum* E *se naziva* sink.

d) *Potreban i dovoljan uvjet da oba korijena jednačine (3) imaju apsolutnu vrijednost veću od jedan je* $|q|>1\quad i\quad |p|<|1+q|$. *U tom slučaju nestabilni ekvilibrijum* E *se naziva* repeler ili izvor.

e) *Potreban i dovoljan uvjet da jedan korijen jednačine (3) ima apsolutnu vrijednost veću od jedan, a da drugi ima apsolutnu vrijednost manju od jedan je*

$$p^2-4q>0\quad i\quad |p|>|1+q|.$$

U tom slučaju nestabilni ekvilibrijum E *se naziva* sedlasta tačka ili sedlo.

f) *Potreban i dovoljan uvjet da najmanje jedan korijen jednačine (3) ima apsolutnu vrijednost jednaku jedan je*

$$|p|=|1+q|\quad ili\quad q=1\quad i\quad p\le 2.$$

U tom slučaju ekvilibrijum E *se naziva* nehiperbolički ekvilibrijum.

Treba napomeniti da je metod linearizacije, vjerovatno prvi metod koji je korišten u teoriji stabilnosti. Metodu linearizacije su među prvima koristili Ljapunov, Perron i Poincare u proučavanju stabilnosti rješenja diferencijalnih jednačina.

3. TAČKE EKVILIBRIJUMA

Tačke ekvilibrijuma $E(\bar{x},\bar{y})$ sistema (1) zadovoljavaju sljedeći sistem jednačina:

$$\bar{x}=\frac{\bar{x}}{A_1+\bar{y}^2} \tag{4}$$

$$\bar{y}=\frac{\bar{y}}{A_2+\bar{x}^2}. \tag{5}$$

Iz jednačine (4) dobivamo

$$\bar{x} - \frac{\bar{x}}{A_1 + \bar{y}^2} = 0,$$

što je ekvivalentno jednačini

$$\bar{x}\left(1 - \frac{1}{A_1 + \bar{y}^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0 \vee \bar{y} = \sqrt{1 - A_1}.$$

Iz jednačine (5) dobivamo

$$\bar{y} - \frac{\bar{y}}{A_2 + \bar{x}^2} = 0,$$

što je ekvivalentno jednačini

$$\bar{y}\left(1 - \frac{1}{A_2 + \bar{x}^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = 0 \vee \bar{x} = \sqrt{1 - A_2}.$$

Dobivamo dvije tačke ekvilibrijuma

$E_0(0,0)$,

i

$E_+\left(\sqrt{1 - A_2}, \sqrt{1 - A_1}\right), \qquad A_1, A_2 \in (0,1).$

Dodatno, ako je $A_1 = 1$ onda svaka tačka na x –osi je tačka ekvilibrijuma, a ako je $A_2 = 1$ onda svaka tačka na y –osi je tačka ekvilibrijuma. Konačno, ako je $A_1 = A_2 = 1$ onda se obje tačke ekivilibrijuma E_0 i E_+ podudaraju, pa svaka tačka na nekoj od koordinatnih osa je tačka ekvilibrijuma.

4. ANALIZA LINEARIZIRANE STABILNOSTI

Preslikavanje T pridruženo sistemu (1) je dato sa

$$T(x, y) = \left(\frac{x}{A_1 + y^2}, \frac{y}{A_2 + x^2}\right).$$

Jakobijan preslikavanja T je

$$J_T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1 + y^2} & -\frac{2xy}{(A_1 + y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(A_2 + x^2)^2} & \frac{1}{A_2 + x^2} \end{pmatrix}.$$

Vrijednost Jakobijana pridruženog preslikavanju T u tački ekvilibrijuma $E(\bar{x}, \bar{y})$ je

$$J_T(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1 + \bar{y}^2} & -2\bar{x}\bar{y} \\ -2\bar{x}\bar{y} & \frac{1}{A_2 + \bar{x}^2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Determinanta Jakobijana (6) je

$$\det J_T(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{(A_1 + \bar{y}^2)(A_2 + \bar{x}^2)} - 4\bar{x}^2\bar{y}^2,$$

a trag Jakobijana (6) je

$$Tr J_T(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{A_1 + \bar{y}^2} + \frac{1}{A_2 + \bar{x}^2}.$$

Teorem 4.1

i. *Pretpostavimo da je $A_1 > 1$ i $A_2 > 1$. Tada je ekvilibrijum E_0 sistema diferentnih jednačina (1) lokalno asimptotski stabilan.*

ii. *Pretpostavimo da je $A_1 < 1$ i/ili $A_2 < 1$. Tada je ekvilibrijum E_0 sistema diferentnih jednačina (1) nestabilan. Preciznije, ekvilibrijum E_0 je sedlasta tačka ako je $A_1 < 1$ i $A_2 > 1$, ili ako je $A_1 > 1$ i $A_2 < 1$, a repeler ako je $A_1 < 1$ i $A_2 < 1$.*

Dokaz:
Vrijednost Jakobijana preslikavanja T u tački ekvilibrijuma $E_0(0,0)$ je

$$J_T(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Determinanta Jakobijana (7) je

$\det J_T(0,0) = \frac{1}{A_1 A_2}$,

a trag Jakobijana (7) je

$Tr J_T(0,0) = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}$.

Dakle, odgovarajuća karakteristična jednačina je sljedećeg oblika:

$$\lambda^2 - \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right)\lambda + \frac{1}{A_1 A_2} = 0,$$

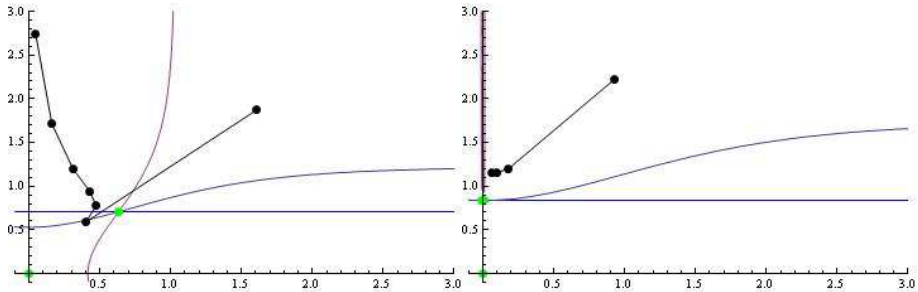
ili u ekvivaletnom obliku

$\left(\lambda - \frac{1}{A_1}\right)\left(\lambda - \frac{1}{A_2}\right) = 0,$

a njeni korijeni su

$\lambda_1 = \frac{1}{A_1}$ i $\lambda_2 = \frac{1}{A_2}$.

Ako je $A_1 > 1$ *i* $A_2 > 1$ tada slijedi da je $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| < 1$, te na osnovu toga zaključujemo da je ekvilibrijum $E_0(0,0)$ lokalno asimptotski stabilan. Ako je $A_1 < 1$ *i* $A_2 > 1$ tada slijedi da je $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| < 1$, ili ako je $A_1 > 1$ *i* $A_2 < 1$ tada slijedi da je $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| > 1$, te na osnovu toga zaključujemo da je ekvilibrijum E_0 sedlo. Ako je $A_1 < 1$ *i* $A_2 < 1$ tada slijedi da je $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| > 1$, te na osnovu toga zaključujemo da je ekvilibrijum E_0 repeler.



a) $A_1 < 1$ *i* $A_2 < 1$ b) $A_1 < 1$ *i* $A_2 = 1$

Slika 1: Na slici a) prikazani su ekvilibrijumi E_0 i E_+, koji su dobiveni kao presjek kritičnih krivih. Na slici b) svaka tačka na y –osi predstavlja tačku ekvilibrijuma E_+. Na svakoj slici su različite početne tačke. Slika je dobivena koristeći softwer *Wolfram Mathematica 7*.

Teorem 4.2

i. *Pretpostavimo da je* $A_1 < 1$ *i* $A_2 < 1$. *Tada je ekvilibrijum* E_+ *sistema diferentnih jednačina (1) sedlasta tačka.*

ii. *Pretpostavimo da je* $A_1 = 1$.*Onda svaka tačka na nenegativnoj* x *–osi je nehiperbolički ekvilibrijum sistema (1). Pretpostavimo da je* $A_2 = 1$. *Tada svaka tačka na nenegativnoj* y *–osi je nehiperbolički ekvilibrijum sistema (1). Konačno, ako je* $A_1 = A_2 = 1$, *onda je svaka tačka na obje nenegativne poluose nehiperbolički ekvilibrijum.*

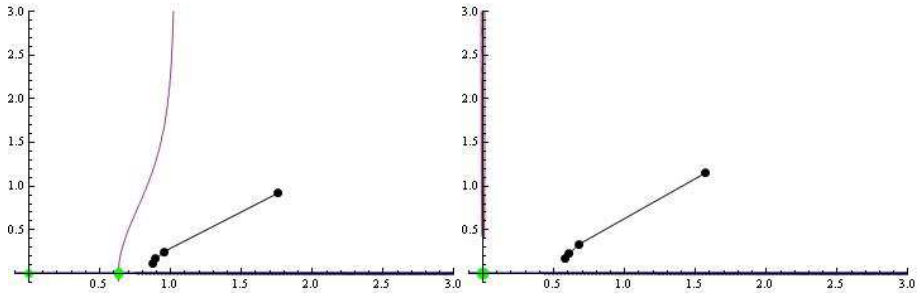
Dokaz:
Vrijednost Jakobijana preslikavanja T u tački ekvilibrijuma $E_+\left(\sqrt{1-A_2},\sqrt{1-A_1}\right)$ je

$$J_T(E_+) = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{(1-A_1)(1-A_2)} \\ -2\sqrt{(1-A_1)(1-A_2)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Determinanta Jakobijana (7) je
$\det J_T(E_+) = 1 - 4(1-A_1)(1-A_2)$,
a trag Jakobijana (7) je
$Tr J_T(E_+) = 2$.
Dakle, odgovarajuća karakteristična jednačina je sljedećeg oblika:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4(1-A_1)(1-A_2) = 0,$$

a njeni korijeni su
$\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{(1-A_1)(1-A_2)}$ i $\lambda_2 = 1 - 2\sqrt{(1-A_1)(1-A_2)}$.
Ako je $A_1 < 1$ *i* $A_2 < 1$ tada slijedi da je $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| < 1$, te na osnovu toga zaključujemo da je ekvilibrijum E_+ sedlo. Ako je $A_1 = 1$ tada slijedi da je $|\lambda_1| = 1$ i $|\lambda_2| = 1$, te na osnovu toga zaključujemo da je ekvilibrijum E_+ nehiperbolički ekvilibrijum. Odnosno svaka tačka na nenegativnoj x –osi je nehiperbolički ekvilibrijum sistema (1). Ako je $A_2 = 1$ tada slijedi da je $|\lambda_1| = 1$ i $|\lambda_2| = 1$, te na osnovu toga zaključujemo da je ekvilibrijum E_+ nehiperbolički ekvilibrijum. Odnosno svaka tačka na nenegativnoj y –osi je nehiperbolički ekvilibrijum sistema (1). Konačno, ako je $A_1 = A_2 = 1$,onda je svaka tačka na obje nenegativne poluose nehiperbolički ekvilibrijum.



a) $A_1 = 1$ *i* $A_2 < 1$ b) $A_1 = 1$ *i* $A_2 = 1$

Slika 2: Na slici a) svaka tačka na x –osi predstavlja tačku ekvilibrijuma E_+. Na slici b) svaka tačka na x –osi ili y –osi predstavlja tačku ekvilibrijuma $E_0 = E_+$.Na svakoj slici su različite početne tačke. Slika je dobivena koristeći softwer *Wolfram Mathematica 7*.

4. LITERATURA

[1] A. Crnkić: *Dinamika monotonih i antimonotonih racionalnih sistema diferentnih jednadžbi*, Magistarski rad, Zenica, 2013.
[2] M.R.S. Kulenović, G. Ladas, *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures*, Hall/CRC Press, Boca raton, London, 2001.
[3] M.R.S. Kulenović, O. Merino, *Discrete Dynamical System and Difference Equations with Mathematica*, Chapman § Hall/CRC Press, Boca raton, London, 2002.
[4] M.R.S. Kulenović, M. Nurkanović, *Asymptotic Behavior of Two Dimensional Linear Fractional System of Difference Equations*, Radovi Matematički, 11 (2002), 59-78.
[5] Dž. Burgić, M.R.S. Kulenović, M. Nurkanović: *Global Dynamics of a Rational System of Difference Equations in the Plane*, Communications of Applied Nonlinear Analysis, 15(2008), 71-84.
[6] E. Camouyis, M.R.S. Kulenović, G. Ladas, O. Merino: *Rational Systems in the Plane*, J. Difference Equation and Apllications, 15(2009), 303-323.